Identidad de los indiscernibles: argumento filosófico y controversia científica

Identity of Indiscernibles: Philosophical Argument and Scientific Controversy

Ing. José Daniel Hoyos Giraldo

Universidad Pontificia Bolivariana

RESUMEN

Se presenta una revisión del argumento de la Ley de Leibniz, también llamado identidad de los indiscernibles, en relación con algunas menciones de Leibniz en sus textos principales y su correspondencia con Samuel Clarke. La interpretación lógica de su principio en apreciación de Bertrand Russell es contrastada con la noción moderna del principio escrito con ayuda del lenguaje matemático actual. La expresión de la identidad de los indiscernibles basado en teoría de conjuntos permite demostrar que términos como *individual*, *idéntico*, *indiscernible*, son susceptibles de formar proposiciones significativas donde las definiciones de estos conceptos reproducen las ideas intuitivas básicas. La polémica entorno a la identidad de los indiscernibles generada en tiempos modernos debido al surgimiento de la teoría cuántica es expuesta de forma conceptual y una posible solución al dilema desde la teoría de cuasi-conjuntos presentada principalmente por Décio Krause es abordada brevemente.

PALABRAS CLAVE: Principio de los indiscernibles; leibniz; lógica; identidad; teoría de cuasi-conjuntos.

ABSTRACT

A review of the argument of Leibniz's Law, also called identity of the indiscernibles, is presented in relation to some mentions of Leibniz in his main texts and his correspondence with Samuel Clarke. The logical interpretation of his principle in appreciation of Bertrand Russell is contrasted with the modern notion of the principle written with the help of current mathematical language. The formulation of the identity of the indiscernibles base on the set theory allows us to demonstrate that terms such as individual, identical, indiscernible, are capable of forming meaningful propositions where the definitions of these concepts reproduce the basic intuitive ideas. The controversy surrounding the identity of the indiscernibles generated in modern times due to the emergence of quantum theory is exposed in a conceptual way and a possible solution to the dilemma from the quasi-set theory presented mainly by Décio Krause is briefly addressed.

KEYWORDS: Principle of the indiscernibles; leibniz; logic; identity; quasi-set theory.

Génesis y disertación filosófica

> La actividad mediante la cual se descubre o determina el sentido de los enunciados: ésa es la filosofía. Por medio de la filosofía se aclaran las proposiciones, por medio de la ciencia se verifican. A esta última le interesa la verdad de los enunciados, a la primera lo que realmente significan; la actividad filosófica de dar sentido cubre la totalidad del campo del conocimiento científico (Schlick, 1965, pág. 62).

La primera intención de este artículo es la revisión de la identidad de los indiscernibles, o Ley de Leibniz (**LL**) como idea filosófica presentada por Leibniz y posteriormente examinada por Bertrand Russell desde un punto de vista lógico, cuya enunciación llega a feliz término con la introducción de lenguajes lógicos de segundo orden, mientras que su prueba queda sujeta a las características del lenguaje donde se desee demostrar, más específicamente se menciona el caso del lenguaje, más cercano a la intuición, correspondiente a la física clásica, en contraposición al lenguaje no intuitivo pero aun así correcto de la física cuántica. Sin embargo, existe una segunda motivación en el trabajo, quizás más trascendente y ambiciosa, la contribución al cambio de paradigma de la filosofía como una disciplina estéril que solo posee una relación con la ciencia de carácter histórico. A lo largo del trabajo se evidencia como un problema nacido en la filosofía se entrelaza con la ciencia, en este caso matemáticas y física, de forma que su validez queda sujeta a proposiciones de carácter verificable, esto es, el problema de los indiscernibles tiene sentido[1]. Todavía más significativo, se presenta el desarrollo de toda una teoría matemática (la teoría de los cuasi-conjuntos) surgida por el problema de la indiscernibilidad, demostrándose el carácter fecundo de los problemas filosóficos, cuando son tratados científicamente.

El argumento de la identidad de los indiscernibles puede presentarse de forma intuitiva con el siguiente ejemplo. Imagínese dos conjuntos de cualidades o propiedades, cada una representando un objeto, por ejemplo, con las características de “X es rojo”, “X es esférico”, “X posee una masa de 5 kg”, “X no tiene olor”, etc. De igual forma le corresponden las mismas cualidades a otro objeto de forma que: “Y es rojo”, “Y es esférico”, “Y posee una masa de 5 kg”, “Y no tiene olor”, etc. De manera que quedan enunciadas todas las características que le hacen *ser* lo que son a estos objetos. La pregunta que responde la identidad de los indiscernibles es si existe en la naturaleza, o es siquiera posible, que existan dos objetos X, Y que cumplan estas características al tiempo, sin que X sea lo mismo que Y.

---

[1] La idea de relacionar la verificabilidad de una proposición con su sentido es uno de los pilares del positivismo lógico. Para ahondar en los detalles de la idea, es clásico el trabajo *La superación de la metafísica mediante el análisis lógico del lenguaje* (Carnap, 1961).

Un primer pasaje en una de sus obras más importantes, *La monadología*, el pensador alemán da respuesta a la cuestión como sigue: “Porque no hay en la Naturaleza dos seres que sean perfectamente el uno como el otro, y donde no sea posible encontrar una diferencia interna, o fundamentada en una denominación intrínseca” (Leibniz, 1889, pág. 11). El concepto de denominación intrínseca adquiere en Leibniz un significado importante en el enunciado de su Ley, por lo que se hace necesario una definición.

En términos modernos, una denominación intrínseca es una propiedad cuyo predicado[2] correspondiente es de orden uno, es decir que se aplica a un solo sujeto, y a una denominación extrínseca le corresponde un predicado de orden dos o superior[3] donde existen varios sujetos. Para clarificar esta definición, puede pensarse en el predicado “X posee una carga eléctrica de 5eV”, como solo es requerido un sujeto para dar sentido al predicado, poseer una carga eléctrica dada es una denominación intrínseca, pues no es necesario ningún otro agente en el predicado. Diferente es el caso de las relaciones de velocidad, posición, ser mayor o menor, etc., donde no tiene sentido la proposición “X es mayor”, sino que requiere mínimamente dos sujetos para cobrar sentido: “X es mayor que Y”.

La idea sostenida por Leibniz de tener en cuenta las propiedades intrínsecas para discernir los individuales encuentra una justificación en la mecánica newtoniana. Supóngase el espacio vacío tridimensional euclídeo E^3 con su infinidad de puntos representados por los números (x, y, z). Dado que este espacio posee simetría traslacional y rotacional, todos estos puntos son cualitativamente idénticos, por lo que según la identidad de los indiscernibles debe tratarse en realidad de un único punto, llegando a una contradicción. De esta forma el carácter absoluto del espacio es contradictorio con la **LL** mientras se incluyan propiedades extrínsecas, como es la localización espacial.

El pensador alemán se caracteriza por la agudez con la que argumenta sus ideas, y al ser el padre del cálculo moderno, las cuestiones lógicas no le eran ajenas. Así pues, tiene una aclaración potente sobre su Ley en la correspondencia con Samuel Clarke donde escribe: “Mantengo que si dos cosas perfectamente indiscernibles existieran, serían dos.” (Clarke & Leibniz, 1980, pág. 106). Seguidamente escribe que este caso hipotético es de todas maneras imposible. La nota anterior es de vital importancia para no redundar en un vicio lógico advertido por varios autores: “decir de dos cosas que son idénticas es un sin sentido” (Wittgeinstein, 2002, pág. 63), no tiene sentido enunciarse la multiplicidad de las cosas para luego preguntarse por su discernibilidad, pues la numeración se da precisamente en virtud de distinguir un algo de otro algo.

Dados dos objetos indiscernibles, si no es posible decir que son idénticos (son el mismo objeto), ¿de qué forma tiene rigor expresar la idea? En palabras de Russell: “Leibniz concluye dicha prueba con la observación de que suponer dos cosas

---

[2] Toda propiedad puede ser un predicado, pero el reciproco no siempre es cierto, pues existen predicados que no son propiedades bien formadas, muestra de ello son las paradojas de Russell y Grelling-Nelson.

[3] Esta convención es comúnmente aceptada y corresponde con la definición expuesta en *Tratado de Filosofía. Ontología I: El moblaje del mundo* (Bunge, 2011, pág. 97)

indiscernibles es suponer la misma cosa bajo nombres diferentes” (Russell, 1937, pág. 76). Al introducir la noción de nombres en lugar de referirse a los objetos directamente, ya el principio se torna más inteligible y claro. Dado un conjunto de propiedades iguales que cumple X e Y, se dice entonces que X e Y son dos nombres para el mismo objeto.

Si se adopta la idea de nombres y predicados para describir la **LL**, debe adoptarse una posición que se enmarca en lo conocido como *bundle theories* (en contraste con las *substratum theories*), posición ampliamente defendida por el mismo Russell, y valga decir en este punto, corresponde al espíritu moderno de las matemáticas. La premisa principal puede describirse como sigue: todo lo que puede decirse con sentido de un objeto, se expresa en sus predicados; esto es, un individual queda definido plenamente por el conjunto de sus propiedades, conjunto potencialmente infinito como admitía el mismo Leibniz (Russell, 1937, págs. 80-81).

Lo anterior se justifica de la siguiente manera. Si se afirma que dos individuales X, Y no difieren en cuanto a sus predicados, pero continúan siendo dos nombres para cosas diferentes, se estaría aseverando que de alguna forma se es capaz de distinguir X de Y, pero no existe un predicado para tal diferencia, es decir, no es comunicable ni expresable en ningún lenguaje posible. Escribe Russell al respecto:

> Pero en este caso, una sustancia no está, en propiedad, definida por sus predicados. Hay una diferencia entre afirmar cierto predicado de una sustancia y afirmarlo de otra. La sustancia sólo puede ser definida como “esto”. O mejor dicho (y aquí es donde se derrumba la doctrina de la sustancia) no puede ser definida en absoluto […] De modo que una sustancia o bien carece por entero de significado, y en tal caso no puede distinguirse de ninguna otra, o se reduce a todas o a algunas de las cualidades supuestas en sus predicados. (Russell, 1937, pág. 80)

Haciendo uso de predicados y nombres, se está introduciendo en el lenguaje lógico la LL, por lo que surge inmediatamente la cuestión acerca de su valor de verdad. En términos generales, existen verdades analíticas, como las matemáticas, que lo son en cualquier mundo posible (son tautologías), por otro lado, existen las verdades de hecho, que son contingentes. El estatus de la **LL** en cuanto a si corresponde con las primeras o las segundas, es sujeto de debate.

A la luz de la metafísica de Leibniz, no porque algo sea lógicamente posible se sigue su factibilidad en el mundo real, debe aún estar en acuerdo con la voluntad divina, y es aquí donde la **LL**, deducida argumentalmente del principio de razón suficiente, es necesaria moralmente. Para Leibniz no existe contradicción *per se* figurarse dos entes reales indistinguibles, pero esto será siempre imposible en virtud de la bondad de Dios. El carácter teológico no hace parte de la intención de este texto, para ahondar en la idea puede remitirse a *Principios lógicos y principios morales: la identidad de los indiscernibles* (Quesada, 2004).

Construcción matemática

Aunque existen antecedentes[4] a la definición de identidad presentada por C. S. Peirce, esta es reconocida (Church, 1970, pág. 300) como la primera definición estricta de la identidad sin confusiones entre uso y mención, solucionando la preocupación de autores anteriores sobre la circularidad de la definición de la identidad. Seguidamente de la definición simbólica dice: "Esto es, decir que dos cosas son idénticas es decir que cada predicado es verdadero de ambos o falso de ambos" (Peirce, 1885, pág. 199).

La teoría de conjuntos es uno de los pilares de la matemática moderna, que comúnmente es axiomatizado por medio de lo que se conoce como axiomas de Zermelo-Fraenkel unidos al axioma de elección (**ZFC**). En esta tradición clásica de conjuntos fundada por Cantor, dos conjuntos son el mismo si poseen los mismos elementos, siguiendo la perspectiva de las *bundle theories*. De esta forma, no es posible en **ZFC** que haya objetos absolutamente indiscernibles, se cumple trivialmente la **LL**. No obstante, hay estructuras donde se admite una indiscernibilidad relativa, esto es posible dado un lenguaje L de primer orden con un número finito de predicados en una estructura no rígida.

Sea la estructura $A = \langle D, R\rangle$ donde D es diferente del vacío y R una relación. Se define que dos objetos x, y que pertenecen al conjunto D son A −indiscernibles si existe un automorfismo[5] $p\colon\ D \to D$ que cumple que $p(x) = y$. Teniendo en cuenta lo anterior, una estructura se llama rígida si el único automorfismo que existe es la identidad. Teniendo en cuenta estas definiciones, es posible dar significado al término *individual* que ha aparecido rapiditamente en el texto. Un objeto x perteneciente a cierto conjunto D, se define A −individual si $f(r) = r$ para todo automorfismo de la estructura A.

Un ejemplo sencillo es de utilidad para observar cómo estas definiciones funcionan y para verificar que capturan la esencia de los conceptos intuitivos correspondientes. La estructura formada por los números enteros (…-2,-1,0,1,2,…) con la propiedad conocida como suma, escrito como como $Z = \langle \mathbb{Z}, +\rangle$, y la biyección $f(a) = -a$, nótese que esta biyección es un automorfismo diferente de la identidad, y enteros como a y $-a$ son Z −indiscernibles y el elemento 0 es el único individuo. Esto es, 1 y -1, que sabemos que no son idénticos, no encuentra forma de distinguirse dentro de la estructura Z dado que existe un automorfismo que lleva de 1 a -1 y viceversa.

Dado que esta condición de indiscernibilidad solo se obtiene en estructuras no rígidas, surge la cuestión acerca de si en la matemática usual existe una estructura global, y el carácter de esta. El universo de los conjuntos bien fundados de von

[4] Véase en *Translations from the philisophical writings of Gotlob Frege* (Frege, 1960) y en *Fundamentos de la aritmética* (Frege, Fundamentos de la aritmética, 1973).

[5] Un automorfismo puede definirse como una biyección en la que se cumple que para todo x,y pertenecientes a un conjunto dado, si se da que x está relacionado con y, tambien es cierto que fx está relacionado con fy, y el reciproco también es cierto.

Neumman, con el que se construye la matemática clásica, es una estructura rígida[6], por lo que todo objeto es un individual. Siguiendo el ejemplo anterior, la estructura Z puede ser ampliada a Z' con el predicado "pertenecer al conjunto con elemento a", se escribe como $Z' = \langle \mathbb{Z}, +, \{a\} \rangle$, formando una estructura rígida.

En resumen, toda estructura puede extenderse a una estructura rígida con elecciones adecuadas de predicados y no existe la indiscernibilidad absoluta, es decir en **ZFC** se cumple la **LL**. Sin embargo, si se quiere generalizar no solo al lenguaje conjuntista, sino a cualquier lenguaje L que cuantifique sobre objetos arbitrarios, por ejemplo, un lenguaje sobre el mundo físico, la solución no es tan trivial.

La **LL**, demostrada como no trivial ni circular (Lorentz, 1969), es examinada posteriormente al trabajo de Kuno Lorentz estableciendo el teorema de la **LL** y demostrándolo, sujeto a ciertas condiciones. El argumento es el siguiente (Giuntini & Mittelstaedt, 1989).

Sea S un conjunto de objetos $x, y, \ldots,$ P un conjunto de predicados $P, Q, \ldots$; La identidad denotada por $=$. Entonces la **LL** se establece como el siguiente teorema.

*Teorema (***LL***).* Para todo elemento x, y pertenecientes a un conjunto S, si $x \neq y$ es verdadero, entonces existe por lo menos un predicado P perteneciente a P tal que $P(x)$ es verdadero y $P(y)$ es falso.

Demostración. Empleando la reducción al absurdo. Suponiendo que la **LL** es falsa, implica que existen elementos x, y que cumplen que $x \neq y$ es verdadero, y para cualquier predicado $P \in P$, la implicación $P(x) \rightarrow P(y)$ es verdadera. Se (x, y) un par de elementos para el cual este es el caso, y P el predicado "ser x", es decir $P(z) := z \in \{x\}$. Entonces se tiene que $x \neq y$ es verdadero, además $P(x) \rightarrow P(y)$, y como $P(x)$ es verdadero, $P(y)$ lo es, por lo que $P(y)$ es falso o $x \neq y$ lo es, ya que $y \in \{x\}$ es falso para $x \neq y$.

En resumen, la **LL** es válido si para todo elemento x existe un predicado el cual es verdadero exclusivamente para ese elemento x. Ese predicado se conoce como *naming predicate* de x.

Lenguajes físicos

Existen multitud de experimentos mentales que pretenden demostrar que la **LL** no es aplicable a nuestro espacio físico, por ejemplo el clásico ejemplo de dos esferas iguales en un espacio vacío, llámese a una a y a la otra b, dado que no hay diferencia ninguna entre ellas, y sin tercer punto de referencia tampoco es posible hablar de diferencias en la localización espacial, intercambiar el nombre de a por el de b y viceversa continua siendo el mismo caso, es decir son indistinguibles, sin ser idénticas (no son dos nombres para una sola esfera, puesto que son dos).

[6] La demostación de esto puede consultarse en *From primitive identity to the non-individuality of quantum objects* (Arenhart & Krause, 2004).

Es posible argumentar que ejemplos de este tipo no tienen del todo validez puesto que quedan muchas preguntas en el aire, ¿es posible tener dos esferas exactamente iguales? ¿Tiene sentido hablar de un universo vacío sin observadores? De cierta manera la física moderna enseña que un observador es parte fundamental de la descripción de un estado físico, por lo que la sola introducción del observador haría discernible ambas esferas en relación de la posición relativa de cada una a este.

La característica de la cual se acaba de hacer uso para salvar el problema de las dos esferas iguales es aplicable a cualquier objeto del mundo clásico, esto es, existe un *naming predicate* para cada objeto en un lenguaje de física clásica L_c en virtud de lo que se conoce como principio de impenetrabilidad clásico, ningún par de objetos pueden ocupar el mismo espacio al mismo tiempo. En este lenguaje L_c, El conjunto S es dado por los objetos determinados por cierto conjunto de propiedades $E_1, E_2, \ldots$, como puede ser la masa, la carga eléctrica, el volumen, etc., donde cada propiedad tiene un predicado correspondiente $\{E_1, E_2, ..\}$ (Castellani & Mittelstaedt, 2000, pág. 1600).

Sumado al hecho clásico de la impenetrabilidad, las trayectorias que siguen los objetos siempre son caminos continuos, que permiten en principio una individuación basada en "la historia" del objeto y distinguirlo como "el mismo" en cualquier instante pasado o futuro.

En la física de lo muy pequeño, descrito por lo que se conoce como mecánica cuántica, en virtud del principio de incertidumbre de Heinsenberg, la trayectoria de una partícula jamás será determinada con completa precisión, no por una limitante técnica, sino teórica. Sumado a esto, De Broglie encontró que la materia misma puede ser descrita como una onda, por lo que se encuentra de cierta forma esparcida por un espacio dado, y estas ondas se entrelazan con otras, siendo imposible mantener el principio de impenetrabilidad clásico. Sin embargo, existe otro principio cuántico que hace las veces de principio de impenetrabilidad, conocido como el principio de exclusión de Pauli.

El principio de exclusión intuitivamente dice que no pueden existir dos partículas en el mismo estado cuántico ocupando la misma región del espacio, por ejemplo, dos electrones con los mismos números cuánticos n, l, m_l, m_s. De ser esto así, podría servir de *naming predicate* en un lenguaje de física cuántica L_q, cumpliéndose la **LL** en la totalidad de los fenómenos descritos por la física, sin embargo, este no es el caso.

El modelo más aceptado y empleado en la física moderna es conocido como modelo estándar, donde existen dos tipos de partículas: las que poseen espín entero (1, 2, …) llamados bosones (como los fotones), y los que poseen espín semientero (1/2, 3/2, …) llamados fermiones (como los electrones). El principio de exclusión de Pauli, que bien puede usarse para construir el *naming predicate*, solo es válido para fermiones. Este hecho ha sido empleado para afirmar que los fermiones cumplen la **LL**, y son individuos, mientras que los bosones no son individuos, por lo que no cumplen la **LL** (Saunders, 2006, pág. 60).

Alguien podría imaginarse dos partículas confinadas cada una en una "jaula", que puede ser construida con un campo electromagnético, de forma que se le nombre p a una y q a la otra, pensándose que se establece la individualidad de cada una. Este caso es conocido como *mock individuality*, es decir una individuación inútil y ficticia. Asignarles nombres a las cosas tiene como fin poder referirse a ellos en situaciones diferentes, y dado que una vez que los electrones sean liberados de sus jaulas, esto no se cumple pues nunca podrá saberse nuevamente cual es realmente p.

> Esta es la razón por la que un ingeniero, cuando discute un dibujo, puede temporalmente hacer una excepción al principio de anonimato y decir, por ejemplo: “El electrón a emitido desde el punto S impactará a la pantalla en P, mientras que el electrón b emitido desde T lo hará en Q”. Pero esta similitud de individualidad de los objetos tiene una duración muy breve. Cuando el electrón impacta la pantalla (o cuándo -retrocediendo en el tiempo- todavía se encuentra dentro del filamento de la fuente) se encuentra con otros electrones con una sustancial superposición y la individualidad es perdida. (Chiara & Francia, 1993, pág. 266)

Esta superposición de las ondas de materia es ineludible. Hace falta lo que se conoce como pozo de potencial infinito, es decir energía infinita, para que la probabilidad de que una partícula se encuentre confinada con absoluta certeza en una región específica del espacio, esto es conocido como efecto túnel y posee fuertes aplicaciones en la física del estado sólido. Esto no es un problema en la práctica, dado que la superposición de partículas lejanas es generalmente, en la práctica, despreciable.

Existen propuestas (Santánnan, 2000) que postulan que la indiscernibilidad de las partículas se debe a una falta de conocimiento del científico, es decir que la mecánica cuántica no es una teoría completa. De cierta manera, es cierto que no es una teoría completa en el sentido de la cuantización de la gravedad, pero este punto de vista es solo especulación, puesto que no hasta el día de hoy no existe una teoría que contradiga la física cuántica y posea resultados experimentales fuertes.

Una propuesta más fecunda al respecto tiene como premisa la ontología de los no-individuos. Esto es, trata las partículas como entidades sin identidad, más técnicamente, un sistema cuántico tendrá asociado un cardinal (un número que se emplea para expresar la cantidad) pero no un ordinal (se emplea para dar orden o posición a los elementos) (Krause, 2006). Esta idea ha sido principalmente desarrollada por Décio Krause en lo que llama teoría de cuasi-conjuntos basado en un trabajo anterior de Hermman Weyl (Philosophy of mathematics and natural science., 1949).

En otras palabras, puede decirse algo como “hay 3 electrones”, pero no “este es el número uno, este el dos, y este el tres”. En esta propuesta, nombrar las partículas con etiquetas solo es una vía práctica al lenguaje, tal como uno de los fundadores de la mecánica cuántica exigía (Schrödinger, 1952, pág. 17). Esto es, no es posible considerar estos nombres como designadores rígidos en el sentido de Kripke.

Se presenta aquí una breve definición de la teoría matemática que sustenta el trabajo reproduciendo la explicación de los autores de la idea (Domenech, Holik, Kniznik, & Krause, 2010). Recordando que la teoría clásica de conjuntos **ZFC** no es capaz de reproducir la indiscernibilidad, se construye otra teoría llamada de cuasi-conjuntos $\mathfrak{Q}$, la cual es obtenida aplicando los axiomas similares de **ZFU** (Zermelo-

Frankel con ur-elementos[7]) a un dominio construido por m-atómos (elementos de los cuasi-conjuntos que no cumplen la identidad) y M-atómos (con las propiedades de los ur-elementos en **ZFU**).

De esta forma, en la teoría $\mathfrak{Q}$, los cuasi-conjuntos con únicamente m-atómos como elementos, las fórmulas $x = y$, $x \neq y$ no son formulas bien formadas del lenguaje, es decir no tienen significado. Además de esto, la relación de indistinguibilidad se denota por $\equiv$, y cumple ser una relación de equivalencia. El concepto de identidad se denota por $=_E$ (no aplica para m-atómos) y se puede abreviar como $=$, donde $x = y$ se cumple si y solo si x, y son cuasi-conjuntos con los mismos elementos o M-atómos pertenecientes a los mismos cuasi-conjuntos.

Dadas estas definiciones, dos elementos de un cuasi-conjunto pueden ser indistinguibles (como dos bosones) sin esto implicar que sean idénticos, esto es, $x \equiv y$ no implica $x = y$. Esto es una característica que, como se expuso en la sección anterior, no es posible en las matemáticas clásicas de **ZFC**.

Dada esta exposición, la **LL** parece mantenerse correcta, pero con una restricción: es válida para todo individual, es decir objetos que cumplan la identidad, sin embargo, existen objetos que de cierta forma son reales, pero no son individuales, y estos pueden ser descritos matemáticamente por los m-átomos.

Conclusiones

La Ley de Leibniz, o identidad de los indiscernibles, es bien caracterizada por Russell en términos de nombres y predicados. Su carácter de verdad analítica o de hecho es analizado en este trabajo, encontrándose que en las matemáticas clásicas (**ZFC)** posee un carácter de verdad analítica. Sin embargo, no es posible demostrar la Ley de Leibniz para un lenguaje arbitrario, de forma que queda sujeto a la existencia de los llamados *naming predicates*.

Para analizar la Ley de Leibniz desde un carácter empírico, se tienen en cuenta un lenguaje de física clásica, donde parece cumplirse la identidad de los indiscernibles en virtud del principio de impenetrabilidad. Contrario a esto, en un lenguaje de física cuántica se evidencia la aparente imposibilidad de separar los individuos y nombrarlos con sentido, discernirlos. Como propuesta más fecunda hasta el momento, se presenta la teoría de los cuasi-conjuntos expuesta por Décio Krause en la que la identidad de las partículas se desvanece, de forma que la Ley de Leibniz pierde terreno de aplicación, si bien no resulta falsa si se aplica solo para "individuos" (entidades que cumplen la identidad).

Este trabajo entremezcla argumentos filosóficos, la génesis de los argumentos de Leibniz con Clarke, para mostrar como en la historia el argumento de la identidad de los indiscernibles se precisa cada vez más, primero en palabras de Russell y luego como una verdad en la teoría clásica de conjuntos. Finalmente, con el surgimiento de la teoría cuántica, la Ley de Leibniz hace necesaria una teoría más general sobre los conjuntos, ahora llamada teoría de cuasi-conjuntos. Este es un buen caso donde un

[7] Son elementos que no son conjuntos, si bien pueden pertenecer a uno.

problema filosófico no se quedó estancado en discusiones interminables, sino por el contrario ha ayudado a desarrollar las mismas teorías científicas.

BIBLIOGRAFÍA

Arenhart, J. B., & Krause, D. (2004). From primitive identity to the non-individuality of quantum objects. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 46*(52), 273-282. doi:10.1016/j.shpsb.2014.01.004

Bunge, M. (2011). *Tratado de filosofía. Ontología I: El moblaje del mundo* (Vol. 3). Barcelona: Gedisa.

Carnap, R. (1961). *La superación de la metafísica por medio del análisis lógico del lenguaje.* Ciudad de México: Instituto de Investigaciones Filosóficas.

Castellani, E., & Mittelstaedt, P. (2000). Leibniz's principle, physics, and the language of physics. *Foundations of Physics, 30*(10), 1587-1604. doi:10.1023/A:1026489931449

Chiara, M. L., & Francia, G. T. (1993). Individuals, kinds and names in physics. *Bridging the gap: Philosophy, mathematics, and physics*, 261-283. doi:doi.org/10.1007/978-94-011-2496-6_13

Church, A. (1970). *Introduction to mathematical logic.* Estados Unidos: Princeton University Press.

Clarke, S., & Leibniz, G. (1980). *La polémica Leibniz-Clarke.* Madrid: Taurus.

Domenech, G., Holik, F., Kniznik, L., & Krause, D. (2010). No labeling quantum mechanics of indiscernible particles. *International Journal of Theoretical Physics, 49*(12), 3085-3091. doi:10.1007/s10773-009-0220-x

Frege, G. (1960). *Translations from the philosophical writings of Gotlob Frege.* Gran Bretaña: Basil Blackwell-Oxford.

Frege, G. (1973). *Fundamentos de la aritmética.* España: Laia.

Giuntini, R., & Mittelstaedt, P. (1989). The Leibniz principle in quantum logic. *International Journal of Theoretical Physics, 28*(2), 159-168. doi:10.1007/BF00669807

Krause, D. (2006). Einstein y la indiscernibilidad. *Praxis Filosófica*(22), 113-130.

Leibniz, G. (1889). *La monadología.* Madrid: Opúsculos.

Lorentz, K. (1969). Die begründung des principium identitatis indiscernibilium. *Studia Leibnitiana, 4*, 149-159.

Peirce, C. S. (1885). On the algebra of logic. *American Journal of Mathematics, 7*(3), 197-202. doi:10.2307/2369269

Quesada, R. (2004). 2004. *Diánoia, 49*(52). doi:10.21898/dia.v49i52.406

Russell, B. (1937). *Exposición crítica de la filosofía de Leibniz* (2 ed.). Buenos Aires: Siglo XX.

Santánnan, A. S. (2000). Elementary particles, hidden variables, and hidden predicates. *Synthese, 125*, 233-245. doi:10.1023/A:1005272827990

Saunders, S. (2006). Are quantum particles objects? *Reviews of Modern Physics, 66*(1), 52-63. doi:10.1093/analys/66.1.52

Schlick, M. (1965). El viraje de la filosofía. En A. J. Ayer, *El positivismo lógico* (pág. 62). Ciudad de México: Fondo de Cultura Económica.

Schrödinger, E. (1952). *Science and humanism.* Cambridge Univ. Press.

Weyl, H. (1949). *Philosophy of mathematics and natural science.* Estados Unidos: University Press.

Wittgeinstein, L. (2002). *Tractatus logico-philosophicus.* London: Routledge.